ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 2, с. 140–143

МЕХАНИКА

УДК 531.355

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОЛЕБАНИЙ ПОПЛАВКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Л. Д. Акуленко[1,2], В. Г. Байдулов[1,2,*]

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлевым 21.09.2018 г.

Поступило 21.09.2018 г.

Исследованы экстремальные по амплитуде и частоте свойства колебаний тонкого (симметричного относительно обеих осей) протяжённого плоского тела эллиптической формы в окрестности поверхности раздела устойчиво стратифицированных идеальных жидкостей. Разработаны численная и аналитическая процедуры решения самосогласованной краевой задачи на асимптотически большом интервале времени, приводящем к существенному радиационному их затуханию и эволюции частоты колебаний. Проведено сопоставление с аналогичными характеристиками, найденными авторами ранее для поплавков других форм, установлены существенные количественные и качественные различия.

Ключевые слова: поплавок, колебания, интегродифференциальные уравнения, частота колебаний, декремент затухания.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524872140-143

1. Рассмотрим плоскую задачу колебаний двумерного симметричного (относительно вертикали и горизонтали) узкого плоского поплавка, совершающего малые вертикальные колебания на границе раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей разной плотности (рис. 1). Устанавливается влияние формы эллиптического поплавка (эксцентриситета) и параметров среды на мгновенные частоту и показатель затухания.

Задача о колебаниях поплавка — пример самосогласованной задачи [1], когда течение вокруг препятствия определяет силу гидродинамического сопротивления (по полю давления), которая вместе с силой Архимеда входит в число сил, позволяющих по второму закону Ньютона рассчитать движение центра масс поплавка. Для решения задачи требуется найти характер обтекания при произвольно заданном вертикальном набегающем потоке. В непрерывно стратифицированной жидкости ранее были решены задачи о свободных колебаниях сферы нейтральной плавучести в идеальной [2] и вязкой [3] жидкости.

В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости в приближении “тонкого поплавка” уравнения малых колебаний имеют вид интегродифференциального уравнения, которое после обезразмеривания горизонтальной $x \to lx$ и вертикальной $y \to hy$ координат и времени $\vartheta = \Omega t$ $(\Omega^2 = g^*/h)$ зависит от формы поплавка $x = \omega(y)$ и величины параметра относительной ширины $\kappa = l/h \ll 1$:

$$s'' + \Omega_0^2 s = -2\kappa\Omega_0^2 \int_0^{\vartheta} K(\vartheta - \tau)s'(\tau)d\tau, \qquad \Omega_0^2 = 4/\pi(1 + \kappa J), \tag{1}$$

где Ω_0 — частота собственных колебаний поплавка (без учёта обратного влияния волнового поля). Определяемая формой характеристика гидродинамической системы

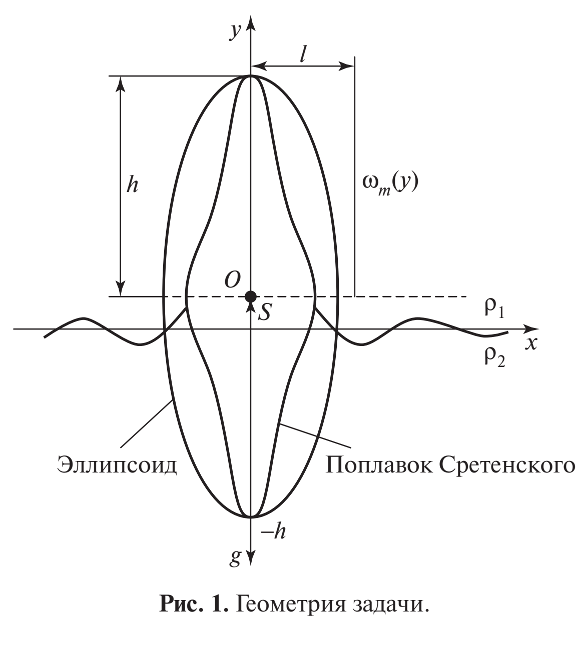

Рис. 1. Геометрия задачи.

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва*

[2] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

**E-mail*: *bayd@ipmnet.ru*

$$J = \frac{4}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \omega'(r)\omega'(q)\ln\left|\frac{q+r}{q-r}\right|dqdr$$

имеет смысл обезразмеренной присоединённой массы единицы длины поплавка. Обычно для упрощения расчётов ограничиваются постановкой задачи Коши для уравнения (1), соответствующей начальному состоянию покоя $s(0) = 1$, $s'(0) = 0$. Форму поплавка описывает функция ω: $x = \omega(y)$, $\omega^2 = 1 - y^2$, $y^2 \le 1$. Недостаточно полные расчёты проведены ранее [4, 5] для некоторых форм поплавков.

Большое влияние на характеристики колебаний поплавка оказывает вид ядра интегральной части уравнения колебаний (1)

$$K(\vartheta) = \int_0^\infty R^2(\xi)\cos(\sqrt{\xi}\vartheta)d\xi,$$
$$R(\xi) = -\int_0^1 \omega'(y)\exp(-\xi y)dy, \qquad (2)$$

зависимость которого от аргумента времени имеет однотипный характер. Хотя для поплавков разных форм величины максимумов и минимумов зависимости $K(\vartheta)$ значительно различаются, равно как и их положения, суммарные площади, ограничиваемые кривыми $K(\vartheta)$, остаются примерно одинаковыми (равными 0,067).

2. Приведём для сопоставления решение уравнения (1) для поплавка с бесконечной осадкой (поплавка Сретенского [1, 4, 5]), которое может быть построено аналитически с использованием преобразования Лапласа

$$s = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\pi\kappa(\xi^2 P + Q)\cos\xi\vartheta - PQ - \pi^2\kappa^2\xi^2\sin\xi\vartheta]\times$$
$$\times\frac{\xi d\xi}{Q^2 + \pi^2\kappa^2\xi^4},$$
$$\omega^2(y) = \exp(-2|y|), \quad |y| < \infty, \qquad (3)$$
$$P = (1+\xi^2)^2 - \kappa(\xi^2 + 1 + 2\ln\xi),$$
$$Q = (\Omega_*^2 - \xi^2)(1+\xi^2)^2 - \kappa(\xi^2(1+\xi^2) + 2\xi^2\ln\xi).$$

В качестве численного (с предельно малым шагом) метода использовался метод Эйлера — конечно-разностное интегрирование уравнения (1), когда зависимость (2) ядра K от времени представлялась в виде гистограммы

$$s_{i+1} = s_i + \delta s_i', \quad s_0 = 1, \quad s_0' = 0,$$
$$s_{i+1}' = s_i' - \delta\Omega_0^2 s_i - 2\kappa\Omega_0^2\delta^2\sum_{j=0}^{i} K_{i-j}s_j'. \qquad (4)$$

Аналитическое решение (3) использовалось для верификации результатов численных расчётов в приближении малых времён, когда аналитическое решение может быть представлено в виде асимптотического ряда (рис. 2)

$$s = \sum\vartheta^n s_n.$$

Численное решение показывает, что при малых значениях параметра κ колебания происходят около положения нейтральной плавучести поплавка (нулевого уровня) и близки к гармоническим; затухание, вызванное излучением волн, мало. При увеличении относительной ширины поплавка колебания усложняются, их период меняется со временем и происходит смещение равновесного уровня, а при $\kappa \ge 0{,}2$ колебания становятся ангармоническими. Форма поплавка также влияет на характер колебаний (рис. 3). Рассчитанные карты смещения поплавка от времени и ширины подтверждают приведённые замечания.

3. Чтобы проанализировать локальные свойства колебаний и определить возможность влияния на них, рассмотрим зависимость мгновенных частоты и коэффициента затухания от времени. Для этого реализуем аналитически метод Эйлера решения интегродифференциального уравнения колебаний поплавка, представив ядро уравнения в виде гистограммы

$$K = \{K_l,\ \vartheta_{l-1} \le \vartheta \le \vartheta_l\ (l = 1, 2, \ldots, N,\ \vartheta_l = l\Delta\vartheta)\}.$$

Тогда уравнение поплавка преобразуется в приближённое дифференциальное уравнение, в которое входит слагаемое с запаздывающим аргументом

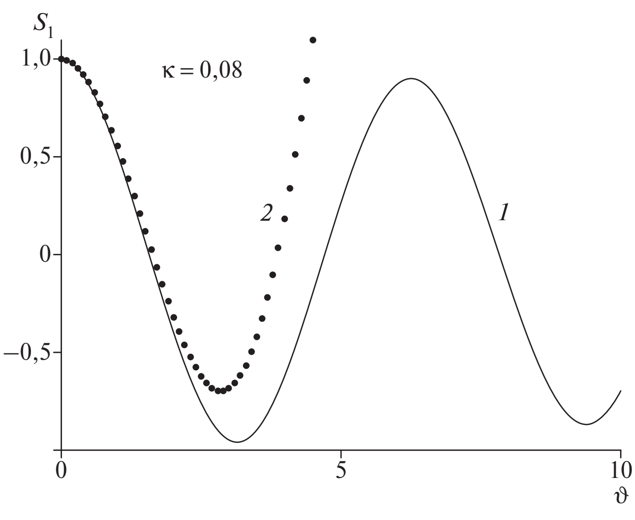

Рис. 2. Зависимость смещения поплавка Сретенского от времени (начальная фаза колебаний). *1* — численное решение, *2* — асимптотика малых времён ($n = 20$).

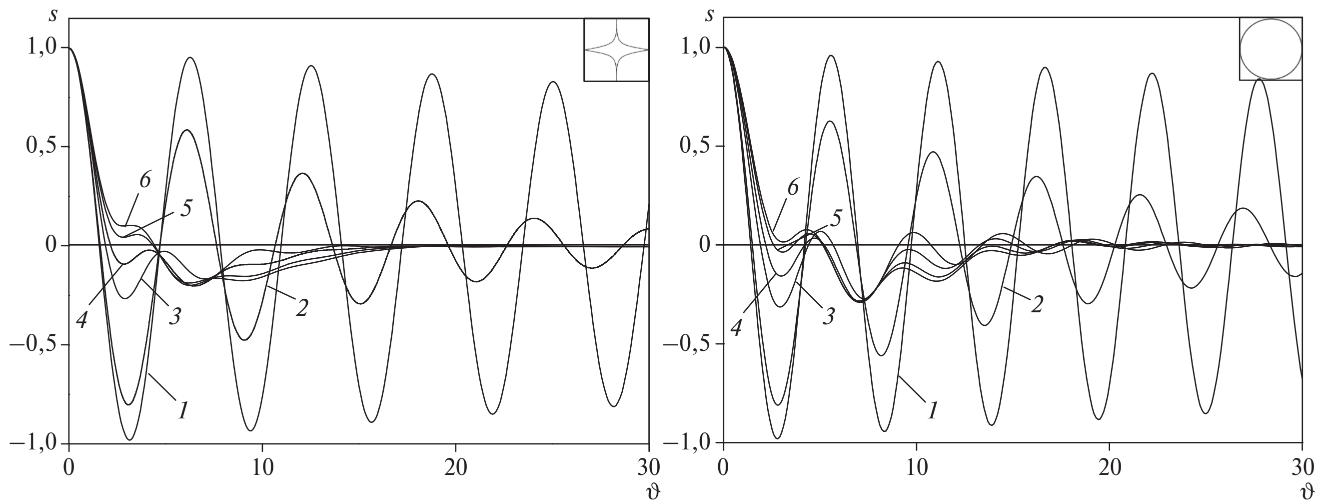

Рис. 3. Зависимости смещений поплавков Сретенского и эллиптической формы от времени (численный расчёт) при различных значениях относительной ширины $\kappa = l/h$: 0,01 (*1*); 0,1 (*2*); 0,5 (3); 0,7 (*4*); 0,9 (*5*); 1,0 (*6*).

$s(\vartheta - \vartheta_l)$. Поскольку уравнение (1) линейное с постоянными коэффициентами (зависимость ядра от времени представлена в виде гистограммы), его решение сводится к решению характеристического уравнения $s(\vartheta) \sim \exp(\lambda\vartheta)$, которое оказывается не алгебраическим, а трансцендентным вида

$$\lambda^2 + \Omega_0^2 = -2\kappa\Omega_0^2\left[K_1 - \sum_{l=1}^{m-1}(K_l - K_{l+1})e^{-\lambda\vartheta_l}\right], \quad \vartheta = m\Delta\vartheta. \tag{5}$$

Выделяя действительную и мнимую части корней характеристического уравнения (5) $\lambda = -\gamma + i\Omega$, будем искать его приближённое решение по параметру κ. При этом действительная часть корней представляет собой мгновенную частоту колебаний, а мнимая — мгновенный декремент затухания

$$\Omega(\vartheta) = \Omega_0\left[1 + \kappa\left(K_1 - \sum_{l=1}^{m-1}(K_l - K_{l+1})\cos\Omega_0\vartheta_l\right)\right], \quad \gamma(\vartheta) = \kappa\Omega_0\sum_{l=1}^{m-1}(K_l - K_{l+1})\sin\Omega_0\vartheta_l. \tag{6}$$

Проведённые расчёты (рис. 4) показывают, что для поплавков эллиптического вида частота колебаний и декремент затухания быстро меняются в начальный период времени, затем выходят на предельные значения, причём величина декремента затухания ожидаемо растёт со временем, а предельное значение частоты может как превышать, так и быть меньше частоты собственных колебаний среды. У других рассмотренных видов поплавков, за исключением поплавка вогнутой ромбовидной формы [5], который характеризуется и самым высоким

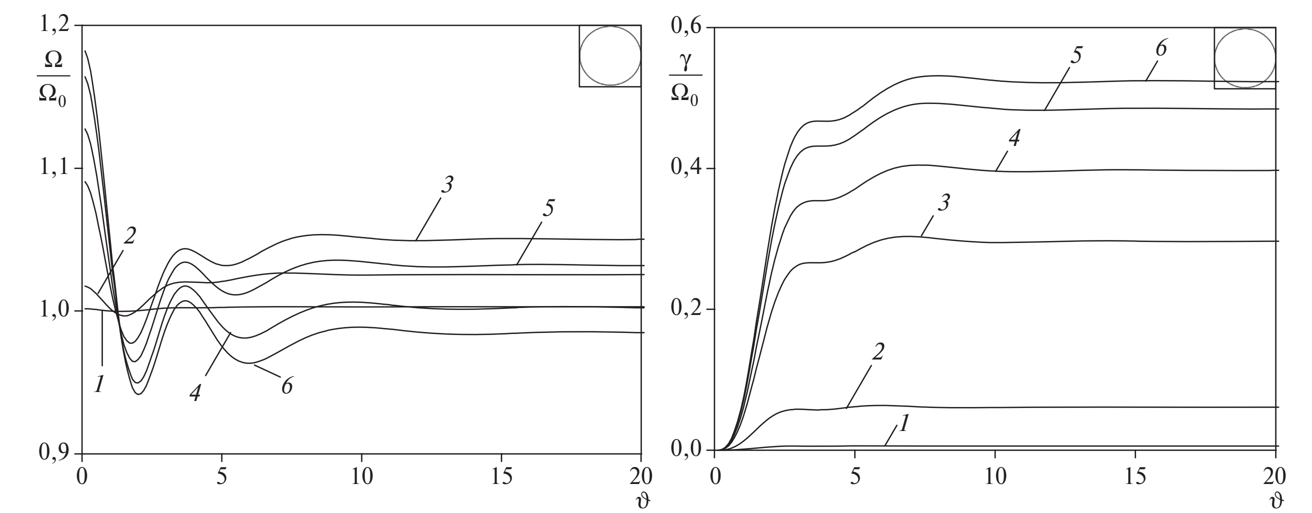

Рис. 4. Зависимости частоты мгновенной частоты колебаний и декремента затухания для поплавка эллиптической формы при различных значениях относительной ширины $\kappa = l/h$ (*1–6* — как на рис. 3).

значением декремента затухания, при отличном от нуля значении параметра κ предельная частота колебаний превосходит собственную частоту колебаний.

Переходя к пределу $\Delta\vartheta \to 0$; $m \to \infty$: $m\Delta\vartheta = \mathrm{const} = \vartheta$ в выражениях для мгновенной частоты и декремента затухания колебаний, получим их аналитические выражения

$$\frac{\Omega(\vartheta)}{\Omega_0} = 1 + \kappa\left(K_1 + \int_0^{\vartheta} \frac{dK}{d\tau}\cos\Omega_0\tau d\tau\right),$$

$$\frac{\gamma(\vartheta)}{\Omega_0} = -\kappa\int_0^{\vartheta} \frac{dK}{d\tau}\sin\Omega_0\tau d\tau, \qquad (7)$$

$$\vartheta \to \infty: \Omega \to \mathrm{const},\ \gamma \to \mathrm{const}.$$

Они позволяют для исходной частоты плавучести рассматриваемой системы определить форму поплавка, соответствующую заданным требованиям к параметрам колебаний. Полученные выражения имеют смысл функций управления формой. Заметим также, что характеристики поплавков могут быть изменены динамически в процессе колебаний, например, за счёт изменения его ширины.

Поплавок эллиптической формы одинаковой площади и ширины (высоты различны) обладает свойством наибольшей добротности (минимального затухания). Этот результат уникален и представляет значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16–01–00412, 17–01–00538).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. *Larsen L.H.* Oscillations of a Neutrally Buoyant Sphere in a Stratified Fluid // Deep-Sea Res. 1969. V. 16. P. 587–603.
3. *Васильев А.Ю.*, *Чашечкин Ю.Д.* Затухание свободных колебаний шара нейтральной плавучести в вязкой стратифицированной жидкости // ПММ. 2009. Т. 73. В. 5. С. 776–786.
4. *Акуленко Л.Д.*, *Нестеров С.В.* Колебания твердого тела на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 35–40.
5. *Акуленко Л.Д.*, *Михайлов С.А.*, *Нестеров С.В.*, *Чайковский А.А.* Численно-аналитическое исследование колебаний твердого тела на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 59–66.

EXTREME PROPERTIES OF OSCILLATIONS OF AN ELLIPTICAL FLOAT

L. D. Akulenko[1,2], V. G. Baydulov[1,2]

[1] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences*, *Moscow*, *Russian Federation*
[2] *Bauman Moscow State Technical University*, *Moscow*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.F. Zhuravlev September 21, 2018

Received September 21, 2018

Extreme in amplitude and frequency properties of oscillations of a thin elongated flat body of elliptical form in the vicinity of the interface of stably stratified ideal fluids are studied. Numerical and analytical procedures have been developed for solving a self-consistent boundary value problem on an asymptotically large time range. The time-dependences of the amplitude decay and frequency of oscillations are obtained. The comparison with similar characteristics, found early by the authors for floats of other forms, is carried out, and significant quantitative and qualitative differences were established.

Keywords: float, neutral buoyancy body, oscillations, integro-differential equations, oscillation frequency, damping factor.