ПРОЦЕССЫ
УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА
ДЛЯ БИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. Б. Ядыкин*, А. Б. Искаков**

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 17.07.2019 г.

Поступило 26.07.2019 г.

Получены новые спектральные разложения решений уравнений Ляпунова, которые возникают при исследовании управляемости и наблюдаемости вектора состояний детерминированных билинейных систем. Такие же уравнения используются при анализе устойчивости и стабилизации стохастических линейных систем управления. Для вычисления спектральных разложений предложен итерационный алгоритм, использующий вычеты резольвенты матрицы динамики. Показано, что этот алгоритм сходится для любого начального приближения в случае несингулярной и устойчивой динамической системы. Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что они позволяют охарактеризовать вклад отдельных собственных компонент системы или их парных комбинаций в асимптотическую динамику энергии возмущения в детерминированных билинейных системах и в стохастических линейных системах. В частности, нормы найденных собственных компонент увеличиваются, если частоты соответствующих им колебательных мод сближаются. Таким образом, найденные разложения открывают возможность принципиально нового подхода для количественной оценки резонансных модальных взаимодействий в большом и важном классе слабонелинейных систем.

Ключевые слова: билинейные системы, стохастические линейные системы, резонансные модальные взаимодействия, уравнения Ляпунова, спектральные разложения, грамианы, субграмианы.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524886599-603>

Уравнения Ляпунова и Сильвестра широко используются в различных приложениях современной теории управления для анализа устойчивости, исследования структурных свойств систем, синтеза наблюдателей состояния, понижения порядка математических моделей, решения задач оптимальной фильтрации [1, 2]. Сингулярные числа Ганкеля для решений уравнений Ляпунова эффективно применяют для уменьшения размерности моделей больших систем в методе сбалансированного отсечения, методе использования кросс-грамиана и их различных модификациях (см. ссылки в [3]). В монографии [4], посвящённой аппроксимации больших моделей динамических систем, впервые получены сингулярные разложения для решений уравнений Ляпунова, основанные на приведении матрицы динамики к диагональному виду. В [5, 6] были получены ещё более общие спектральные разложения решений уравнений Ляпунова и Сильвестра для линейных систем на основе использования преобразования Лапласа и теории вычетов для случаев простого и произвольного спектра динамической матрицы системы. Эти решения были представлены в виде суммы эрмитовых матриц, соответ-

ствующих отдельным собственным числам системы или их парным комбинациям. Практически такие же аналитические решения были найдены в другой форме в [7] с помощью нормальных форм Жордана. В той же статье были получены условия существования решений непрерывных и дискретных матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра, а также предложены эффективные вычислительные алгоритмы их нахождения, основанные на приведении матрицы динамики линейной системы к форме Жордана.

Билинейные системы представляют важный класс слабонелинейных систем, который позволяет точно описывать нелинейные эффекты, возникающие при воздействиях малой величины. Известные модели билинейных систем описывают эволюцию ядерных реакторов и электроэнергетических систем, динамику молекул в химических реакциях, демографические процессы, регуляцию в экологических системах, процессы клеточной динамики в биологии и иммунологии, капиталовложения и систему налогообложения в экономике, некоторые виды динамики самолёта [8]. Использование уравнений Ляпунова для анализа свойств управляемости и наблюдаемости билинейных систем давно известно в теории управления [10]. В монографии [9] многомерное преобразование Лапласа и Z-преобразование были применены для вычисления изображений ядер Вольтерра для нелинейных, в том числе и билиней-

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской Академии наук, Москва

* E-mail: jad@ipu.ru

** E-mail: isk_alex@mail.ru

ных, динамических систем. Методы уменьшения размерности билинейных динамических систем на основе использования спектральных свойств уравнений Ляпунова были исследованы в [11]. Эффективные итерационные алгоритмы для решения таких уравнений были предложены в [12, 13]. В работе [14] сформулирован единый подход к построению упрощённых моделей билинейных детерминированных систем и линейных стохастических систем высокой размерности, основанный на использовании решений соответствующих уравнений Ляпунова.

В данном сообщении впервые получены спектральные разложения уравнений Ляпунова для детерминированных билинейных систем и для линейных стохастических систем. В отличие от [12–14], использующих сингулярные числа Ганкеля, в данной работе спектральные разложения получены в более общей форме, которая позволяет применить их для оценки резонансных модальных взаимодействий в билинейных системах, что невозможно сделать используя только сингулярные числа Ганкеля. В отличие от [5–7], исследующих разложения функций Ляпунова для линейных систем, в настоящей работе аналогичные спектральные разложения получены для важного класса нелинейных систем, а именно для билинейных систем. Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что они открывают возможность принципиально нового подхода для количественной оценки резонансных модальных взаимодействий в большом и важном классе слабонелинейных систем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются уравнения Ляпунова вида

$$AP + PA^* + \sum_{\gamma=1}^m N_{\gamma} P N_{\gamma}^* = -Q, \text{ где } Q = BB^* \text{ или } C^*C, \quad (1)$$

звёздочка обозначает эрмитово сопряжение, матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$ описывают линейную часть динамики системы, а матрицы $N_{\gamma} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ учитывают билинейные компоненты. Уравнения (1) характеризуют свойства управляемости и наблюдаемости вектора состояний детерминированной билинейной системы [10, 11]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{\gamma=1}^m N_{\gamma} x(t) u_{\gamma}(t) + Bu(t), \\ x(0) &= x_0, \quad y(t) = Cx(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ — векторы состояния, управления и выходного сигнала. Те же самые уравнения (1) возникают при анализе устойчивости и

стабилизации стохастических линейных систем [13, 14].

Линейный оператор в левой части (1) можно представить как сумму двух операторов

$$\mathcal{L}_A: P \mapsto AP + PA^* \text{ и } \Pi: P \mapsto \sum_{\gamma=1}^m N_{\gamma} P N_{\gamma}^*. \quad (3)$$

Первый оператор $\mathcal{L}_A$ представляет собой стандартный оператор Ляпунова, а второй оператор Π является неотрицательным в том смысле, что $\Pi(P) \geq 0$, когда $P \geq 0$. Будем предполагать, что линейный оператор $\mathcal{L}_A + \Pi$ несингулярен, и, таким образом, уравнение (1) всегда имеет единственное решение. Тогда решения P_C и P_O , отвечающие случаям $Q = BB^T$ и $Q = C^T C$, соответственно, называются грамианами управляемости и наблюдаемости для билинейной системы (2). Для простоты дальнейшего изложения мы будем также считать, что динамическая матрица системы A имеет простой спектр $\sigma(A)$.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ДЛЯ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Чтобы сформулировать спектральные разложения для решений уравнений Ляпунова (1), рассмотрим сначала стандартное уравнение Ляпунова

$$AP + PA^* = -Q, \text{ где } Q^* = Q > 0. \quad (4)$$

В работе [6] получены спектральные разложения его решений, которые были представлены с помощью матричных вычетов R_i , представляющих собой коэффициенты в разложении резольвенты матрицы A :

$$(Is - A)^{-1} = \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \frac{R_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{R_n}{s - \lambda_n}. \quad (5)$$

Сформулируем этот результат для уравнения (4) в следующем виде.

Теорема 1 [6]. Если $\lambda_i^* + \lambda_j \neq 0$ для всех $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)$, то для любой матрицы Q существует единственное решение уравнения Ляпунова (4), которое можно представить в виде

$$P = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_i = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}, \quad \tilde{P}_i = \sum_{j=1}^n P_{ij}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i &= -\{R_i Q (\lambda_i I + A^*)^{-1}\}_{\text{Herm}}, \\ P_{ij} &= \left\{ \frac{-1}{\lambda_i + \lambda_j^*} R_i Q R_j^* \right\}_{\text{Herm}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$\{\dots\}_{\text{Herm}}$ обозначает эрмитову часть матрицы, а R_i и R_j — матричные вычеты, соответствующие собственным числам $\lambda = \lambda_i$ и $\lambda = \lambda_j$.

Каждый член $\tilde{P}_i$ или P_{ij} в разложениях (6) был назван субграмианом. Эти члены характеризуют вклад соответствующих собственных мод или их пар в вариацию энергии системы, определяемую соответствующим грамианом P на бесконечном интервале времени.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 субграмианы $\tilde{P}_i$ и P_{ij} в разложениях (6) удовлетворяют уравнениям Ляпунова

$$A\tilde{P}_i + \tilde{P}_i A^* = -\frac{1}{2}(R_i Q + Q R_i^*), \quad (8)$$

$$A P_{ij} + P_{ij} A^* = -\frac{1}{2}(R_i Q R_j^* + R_j Q R_i^*). \quad (9)$$

Используем результат теоремы 2 для определения спектральных разложений решения уравнения Ляпунова (1).

Утверждение 1. Спектральные разложения решений уравнения Ляпунова (1) имеют вид

$$P = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_i = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}, \quad \tilde{P}_i = \sum_{j=1}^n P_{ij}, \quad (10)$$

где матрицы $\tilde{P}_i$ и P_{ij} определяются соответственно как решения уравнений

$$A\tilde{P}_i + \tilde{P}_i A^* + \sum_{\gamma=1}^m N_{\gamma} \tilde{P}_i N_{\gamma}^* = -\frac{1}{2}(R_i Q + Q R_i^*), \quad (11)$$

$$A P_{ij} + P_{ij} A^* + \sum_{\gamma=1}^m N_{\gamma} P_{ij} N_{\gamma}^* = -\frac{1}{2}(R_i Q R_j^* + R_j Q R_i^*). \quad (12)$$

По аналогии с линейным случаем, матрицы $\tilde{P}_i$ и P_{ij} будем называть субграмианами для билинейной системы. Согласно сделанному ранее предположению, линейный оператор, стоящий в левой части (11) и (12), несингулярен. Поэтому субграмианы $\tilde{P}_i$ и P_{ij} определяются однозначно для любой матрицы Q . Заметим также, что $\sum_{i=1}^n R_i = I$. Поэтому, складывая уравнения (12) для всех j , получаем уравнения (11). Складывая уравнения (11) для всех i , получаем уравнение (1).

3. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Предположим, что билинейная система (2) устойчива, т.е. собственные числа линейного оператора в уравнении (1) лежат в левой полуплоскости

$\sigma(\mathcal{L}_A + \Pi) \in \mathbb{C}_-$. Тогда, согласно теореме о сходящихся расщеплениях в [15], это эквивалентно условию, что $\sigma(\mathcal{L}_A) \in \mathbb{C}_-$ и спектральный радиус $\rho(\mathcal{L}_A^{-1}\Pi) < 1$. Используя введенные ранее обозначения, для решения (1) можно предложить следующую итерационную схему [13]:

$$P^{k+1} = -\mathcal{L}_A^{-1}(\Pi(P^k)) - \mathcal{L}_A^{-1}(Q), \quad (13)$$

где k — номер итерации. Эта схема сходится независимо от начального условия P^0 , так как $\rho(\mathcal{L}_A^{-1}\Pi) < 1$. Тот же самый оператор используется для вычисления субграмианов в (11) и (12). Отсюда получаем следующее

Утверждение 2. Пусть уравнение Ляпунова (1) несингулярно и устойчиво, т.е. $0 \notin \sigma(\mathcal{L}_A + \Pi)$ и $\sigma(\mathcal{L}_A + \Pi) \in \mathbb{C}_-$. Тогда субграмианы $\tilde{P}_i$ и P_{ij} в (11) и (12) определяются однозначно с помощью следующих итерационных схем, сходящихся при любом начальном приближении:

$$\tilde{P}_i^{k+1} = -\mathcal{L}_A^{-1}(\Pi(\tilde{P}_i^k)) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_A^{-1}(R_i Q + Q R_i^*), \quad (14)$$

$$P_{ij}^{k+1} = -\mathcal{L}_A^{-1}(\Pi(P_{ij}^k)) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_A^{-1}(R_i Q R_j^* + R_j Q R_i^*). \quad (15)$$

Скорость сходимости итерационных схем (14) и (15) можно существенно ускорить, если применить методы подпространств Крылова и неявное предобуславливание с переменными направлениями (ADI preconditioning) для обратного оператора Ляпунова [13].

Рассмотрим частный случай, когда матрица A и все матрицы N_{γ} имеют диагональный вид: $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $N_{\gamma} = \text{diag}\{v_1^{\gamma}, v_2^{\gamma}, \dots, v_n^{\gamma}\}$. Тогда итерационные схемы (14) и (15) для вычисления субграмианов расщепляются по матричным компонентам и сводятся к геометрическим прогрессиям с

показателями $q_{\text{pr}} = \frac{\sum_{\gamma} v_p^{\gamma} (v_r^{\gamma})^*}{\lambda_p + \lambda_r^*}$ для pr -компоненты

матрицы. В этом случае компоненты матриц субграмианов вычисляются аналитически:

$$(\tilde{P}_i)_{\text{pr}} = \frac{1}{1 - q_{\text{pr}}} (\tilde{P}_i^{(0)})_{\text{pr}}, \quad (P_{ij})_{\text{pr}} = \frac{1}{1 - q_{\text{pr}}} (P_{ij}^{(0)})_{\text{pr}},$$

$$q_{\text{pr}} = \frac{\sum_{\gamma=1}^m v_p^{\gamma} (v_r^{\gamma})^*}{\lambda_p + \lambda_r^*},$$

$$\tilde{P}_i^{(0)} = -\left\{ R_i Q (\lambda_i I + A^*)^{-1} \right\}_{\text{Herm}},$$

$$P_{ij}^{(0)} = \left\{ \frac{-1}{\lambda_i + \lambda_j^*} R_i Q R_j^* \right\}_{\text{Herm}},$$

где $(\cdot)_{\text{pr}}$ обозначает pr -компоненту матрицы, а q_{pr} — знаменатель её геометрической прогрессии.

Пример. Рассмотрим следующее уравнение Ляпунова для билинейной системы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot P + P \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Согласно утверждению 1, его решение раскладывается на субграмианы в виде

$$P = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 4,5 & 0,75 \\ 0,75 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5 & 1,25 \\ 1,25 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 & 0,75 \\ 0,75 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 & 0,75 \\ 0,75 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 17–08–01107–а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. Учеб. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
2. Васильев С.Н., Косов А.А. Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // АиТ. 2011. № 6. С. 27–47.
3. Baur U., Benner P., Feng L. Model order reduction for linear and nonlinear systems: a system-theoretic perspective // Archives of Comp. Methods in Engineering. 2014. V. 21. № 4. P. 331–358.
4. Antoulas A.C. Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. Advances in Design and Control. Philadelphia: SIAM, 2005. 479 p.
5. Ядыкин И.Б. О свойствах грамианов непрерывных систем управления // АиТ. № 6. 2010. С. 39–50.
6. Ядыкин И.Б., Исаков А.Б. Спектральные разложения для решений Сильвестра–Ляпунова–Крейна // ДАН. 2017. Т. 472. № 4. С. 388–392.
7. Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
8. Mohler R.R., Kolodziej W.J. An Overview of Bilinear System Theory and Applications // IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. 1980. V. SMC-10. № 10. P. 683–688.
9. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.
10. Gray W.S., Mesko J. Energy Functions and Algebraic Gramians for Bilinear Systems. In: Preprints of the 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symp. Enschede. 1998.
11. Al-Baiyat S., Farag, A.S., Bettayeb M. Transient approximation of a bilinear two-area interconnected power system // Electric Power Systems Research. 1993. V. 26. Iss. 1. P. 11–19.
12. Zhang L., Lam J. On H2 Model Order Reduction of Bilinear Systems // Automatica. 2002. V. 38. P. 205–216.
13. Damm T. Direct Methods and ADI-preconditioned Krylov Subspace Methods for Generalized Lyapunov Equations // Numer. Linear Algebra Appl. 2008. V. 15. P. 853–871.
14. Benner P., Damm T. Lyapunov Equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. № 2. P. 686–711.
15. Schneider H. Positive operators and an inertia theorem // Numerische Mathematik. 1965. V. 7. P. 11–17.

SPECTRAL DECOMPOSITIONS FOR THE SOLUTIONS OF LYAPUNOV EQUATIONS FOR BILINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

I. B. Yadykin, A. B. Iskakov

Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev July 17, 2019

Received July 26, 2019

In this paper, novel spectral decompositions are obtained for the solutions of generalized Lyapunov equations, which are observed in the study of controllability and observability of the state vector in deterministic bilinear systems. The same equations are used in the stability analysis and stabilization of stochastic linear control systems. To calculate these spectral decompositions, an iterative algorithm is proposed that uses the residues of the resolvent of the dynamics matrix. This algorithm converges for any initial guess, for a non-singular and stable dynamical system. The practical significance of the obtained results is that they allow one to characterize the contribution of individual eigen-components or their pairwise combinations to the asymptotic dynamics of the perturbation energy in deterministic bilinear and stochastic linear systems. In particular, the norm of the obtained eigen-components increases when frequencies of the corresponding oscillating modes approximate each other. Thus, the proposed decompositions provide a new fundamental approach for quantifying resonant modal interactions in a large and important class of weakly nonlinear systems.

Keywords: bilinear systems, stochastic linear systems, resonant modal interactions, Lyapunov equations, spectral decompositions, Gramians, sub-Gramians.